



МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИFUЗІЙНОГО ТИПУ НА ОСНОВІ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ЗА ЧАСОМ

**Ярослав П'ЯНИЛО¹, Ганна ЛЯНЦЕ¹,
Анатолій ЛОПАТЬЄВ², Адріан ТОРСЬКИЙ¹**

¹ Інститут прикладних проблем механіки
та математики ім. Я.С. Підстригача, Львів, Україна;

² Львівський державний університет фізичної
культури імені Івана Боберського, Україна

Вступ. Відомо, що масоперенос у різних пористих середовищах описують параболічними диференціальними рівняннями. Математичні моделі таких процесів зводяться до потреби розв'язування крайових задач дифузного типу. Загалом коефіцієнти таких задач є змінними і в просторі, і в часі. Тож і побудовані математичні моделі адекватні в такому простово-часовому проміжку, у якому можна вважати сталими коефіцієнти рівнянь. За межами вказаних проміжків треба уточнювати сформульовану краєву задачу. Процес масопереносу в пористих середовищах залежить від його історії. Диференціальні рівняння в частинних похідних не володіють властивістю зберігання історії процесу. Одним із виходів з цієї ситуації є застосування дробового числення, зокрема похідних дробового порядку.

Незважаючи на значну кількість публікацій з теорії дробового числення, наявні малодосліджені проблеми під час застосування його на практиці. Зокрема, до них належить задачі визначення порядку дробової похідної, вибору певного виду дробового числення для моделювання деякого процесу, методу доведення крайової задачі до числа.

Метою — побудова математичних моделей процесів, які описують диференціальними рівняннями параболічного типу в термінах похідних дробових порядків.

Для дослідження впливу похідних дробових порядків на процеси типу дифузії проаналізуємо таку модельну задачу.

Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

на проміжку довжини l , $x \in [0, l]$ за нульової початкової умови та

$$f(0, t) = \sqrt{\pi/a\sqrt{t}}, \quad f(l, t) = 0.$$

Розв'язок цієї крайової задачі має вигляд

$$f(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(2il-x)^2}{4a^2t}\right) - \exp\left(-\frac{(2l+2il-x)^2}{4a^2t}\right) \right).$$

У літературі запропоновано багато видів похідних дробового порядку. Найбільш часто застосовують похідні дробового порядку в термінах Капуто:

$${}^c D_{\tau}^{\delta} = \frac{{}^c \partial^{\delta}}{\partial \tau^{\delta}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)} \int_0^{\tau} \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \varphi(\xi) (\tau - \xi)^{\delta-m-1} d\xi,$$

де $m = [\alpha]$, $[\cdot]$ — ціла частина дійсного числа, та в термінах Ріманна-Ліув'єля

$$D_{\tau}^{\delta} = \frac{{}^c \partial^{\delta}}{\partial \tau^{\delta}} \varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\delta)} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} \int_0^{\tau} \varphi(\xi) (\tau - \xi)^{\delta-m-1} d\xi.$$

Між похідними Капуто й Рімана-Ліувіля наявний такий зв'язок:

$${}^C D_{\tau}^{\delta} \varphi = D_{\tau}^{\delta} \varphi - \sum_{k=0}^m \frac{\tau^{k-\delta}}{\Gamma(k-\delta+1)} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \varphi.$$

Попри зв'язок між цими похідними дробового порядку, Під час їх використання виникають різні теоретичні й обчислювальні складнощі. Серед них такі, як критерій вибору певного виду похідної дробового порядку та методи розв'язування відповідних крайових задач, які виникають у разі моделювання цих об'єктів.

1. Формулювання задачі в термінах похідних дробового порядку.

Треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0$$

на проміжку довжини l , $x \in [0, l]$ за нульової початкової умови та

$$f(0, t) = \sqrt{\pi}/a\sqrt{t}, \quad f(l, t) = 0.$$

$D_{0+}^{\alpha} f(t)$ — дробова похідна Рімана-Ліувіля.

Сформульовану задачу розв'язують за допомогою спектрального методу для $0 < \alpha < 1$.

Прийmemo, що функції, які входять у розв'язок задачі, можна подати у вигляді ряду Фур'є-Лагерра. Функцію $f(x, t)$, $t \in [0, \infty)$, $x \in [0, l]$ розвинемо в ряд за многочленами Лагерра $L_m(t)$

$$f(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) L_m(t).$$

Якщо функцію $k(t) = t^{-\alpha}$ розвинути в ряд Фур'є за многочленами $L_m(t)$, то для інтегральної згортки

$$\frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau) f(x, \tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) L_{n+m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) L_n(t),$$

де k_n та f_m — коефіцієнти Фур'є-Лагерра функцій $k(t)$ й $f(t)$, отримуюмо

$$c_n = \sum_{m=0}^n k_m f_{n-m}(x) = \sum_{m=0}^n k_{n-m} f_m(x).$$

Підставивши у вихідне рівняння подання функцій рядами за многочленами Лагерра, отримаємо рекурентне співвідношення для визначення коефіцієнтів Фур'є-Лагерра:

$$f_n''(x) = \frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^n k_{n-m} f_m(x) = \frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} \left(k_0 f_n(x) + \sum_{m=0}^{n-1} k_{n-m} f_m(x) \right).$$

Розв'язок останнього диференціального рівняння шукається у вигляді ряду Фур'є за косинусами виду

$$f_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} f_{nr} \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Інтегруванням за частинами за заданих крайових умов отримуємо, що

$$f_{nk}'' = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 f_{nk} + \frac{2}{l} \left[(-1)^n f_z'(l) - f_z'(0) \right].$$

Остання формула дає змогу побудувати рекурентні співвідношення для знаходження коефіцієнтів Фур'є за косинусами розкладу функцій $f_n(x)$. Зокрема, для $n=0$ отримуємо

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{0k} \cos \frac{k\pi x}{l},$$

будемо мати

$$f_{0k} = \frac{\frac{2}{l} \left[(-1)^k f_0'(l) - f_0'(0) \right]}{\frac{1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2}.$$

Для $n=1$ отримується

$$f_{1j} = \frac{\frac{2}{l} \left[(-1)^j f_1'(l) - f_1'(0) \right]}{\frac{k_0}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} + \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2} - \frac{\frac{k_1}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} f_{0j}}{\frac{k_0}{a^2 \Gamma(1-\alpha)} + \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2}.$$

Висновок. У роботі запропоновано аналітичний метод розв'язування крайових задач у термінах похідних дробових порядків за часом в ортогональних базисах. На модельній задачі проведено обчислювальний експеримент, що підтверджує ефективність побудованого методу. Отримані результати можуть бути використані для дослідження масопереносу в пористих середовищах, зокрема в м'яких тканинах живих організмів і рослинах.