



УДК 679.054.65:081.2:796:519.24

# ТОНКОСТІННИЙ СТРИЖЕНЬ ЯК МОДЕЛЬ СПОРТИВНОГО ПРИЛАДДЯ

**Ігор ЗАНЕВСЬКИЙ**

*Львівський державний університет фізичної культури  
імені Івана Боберського м. Львів, Україна*

**Вступ.** Видовжені тонкостінні елементи циліндричної форми з відкритим профілем поперечного перетину широко застосовують у сучасних машинобудівних, будівельних конструкціях і спортивних приладах. За розрахункові моделі таких елементів беруть оболонки або тонкостінні стрижні. Здебільшого модель тонкостінного стрижня за відповідністю не поступається моделям оболонки, залишаючись водночас суттєво простішою за структурою та відповідним математичним апаратом.

Основи теорії тонкостінних стрижнів з відкритим профілем поперечного перетину заклали С. П. Тимошенко [1] і (Дж. М. Гере) [2]. Для циліндричної оболонки, характерні розміри якої (довжина, розмір поперечного перетину й товщина стінки) є величинами різного порядку, модель тонкостінного стрижня Тимошенка-Власова дає змогу одержати результати з прийнятною для інженерних розрахунків точністю.

**Методи.** В основу цієї моделі покладено гіпотези про недеформованість профілю поперечного перетину та про відсутність поперечних зсувів (рис. 1):

$$\tau_{sz} = \frac{2Hc}{J_d} - \frac{Q_x S_y}{J_y e} - \frac{Q_y S_x}{J_x e} - \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega e}, \quad (1)$$

де  $H$  – момент кручення, що виникає в поперечному перетині внаслідок чистого кручення стрижня;  $c$  – відстань точки  $M$  від серединної поверхні;  $J_d$  – момент інерції поперечного перетину щодо чистого кручення;  $Q_x, Q_y$  – внутрішні поперечні сили;  $S_x, S_y$  – статичні моменти «відокремлених» частин поперечного перетину, які перебувають відповідно, поза абсцисою  $x = x_M$  та ординатою  $y = y_M$ ;  $S_\omega$  – секторіальний статичний момент поперечного перетину [1];  $J_x, J_y$  – головні осьові моменти інерції поперечного перетину;  $M_\omega$  – момент від кручення зі згином;  $J_\omega$  – секторіальний момент поперечного перетину;  $e$  – товщина стінки стержня.

Запишемо також такі оцінки величини геометричних характеристик поперечного перетину:

$$F \sim eh; J_x \sim J_y \sim eh^3; r^2 \sim \omega \sim h^2; J_\omega \sim eh^5; J_d \sim e^3 h;$$

$E \sim E_I \sim G, a_x \sim a_y \sim h; S_x \sim S_y \sim eh^2; S_\omega \sim eh^3; \chi \sim \psi \sim h, \varphi \sim h^4.$   
та характеристик матеріалу.

Зазначимо, що оцінки величини доданків підінтегрального виразу потенціальної енергії є пропорційними до множника  $Eeh^3 A^2 / \lambda^4$ , натомість оцінки доданків підінтегрального виразу кінетичної енергії пропорційні до множника  $eh A^2 / \tau^2$ . Відносно цих множників можна оцінити величини окремих доданків у підінтегральних виразах енергій. Приймаючи порядок доданків, оцінки яких складаються тільки зі вказаних множників за нульовий, оцінимо порядок решти доданків відносним параметром  $(h/\lambda)^m$ , де  $m=2, 4, 6$ . Члени нульового порядку вважають основними, а решту – другорядними.

Результати й обговорення. У межах прийнятої системи гіпотез вирази (1) є точними. Вилучаючи з підінтегральних виразів ті чи ті члени, вносимо до них похибки величиною відповідного порядку. Запишемо вирази для квадрата власної частоти стержня у формі:

$$p^2 = \frac{V^*(1-v_v^2)}{W^*(1-v_w^2)}, \quad (2)$$

де  $V^*$ ,  $W^*$  – величини, пропорційні відповідно  $V$ ,  $W$ ;  $v_v^2$ ,  $v_w^2$  – відносні енергетичні похибки.

З урахуванням повних виразів, тобто за  $v_v = v_w = 0$ , формула (2) дає точне (у межах прийнятих гіпотез) значення квадрата власної частоти:

$$p^2 = \frac{V^*}{W^*}. \quad (3)$$

Підставивши у вираз відносної похибки квадрата власної частоти

$$v^2 = \frac{p^2 - p_0^2}{p_0^2} \quad \text{формули (2) і (3), отримаємо:}$$

$$v^2 = \frac{v_w^2 - v_v^2}{1 - v_w^2} \approx v_w^2 - v_v^2. \quad (4)$$

Очевидно, що порядок величини  $v^2$  дорівнює найбільшому з порядків величин. Отже, не розв'язуючи задачу про коливання, можна наперед оцінити величину похибки результату для прийнятого спрощеного варіанту розрахункової моделі. З іншого боку, для досягнення певної точності результату виявляється можливим, виходячи з отриманих оцінок похибки, приймати найпростіший варіант розрахункової моделі.

На рис. 2 зображено області застосування різних варіантів динамічної моделі тонкостінного стержня в системі координат похибки квадрата власної частоти та відношення характерних параметрів в логарифмічному масштабі. Границю між першою та другою областями визначено так. Нехтування другорядними членами порядку  $(h/\lambda)^2$  у підінтегральних виразах призводить до відносної похибки результату  $v \sim h/\lambda$ . Ця пряма на графіку показує зазначену границю. Таким чином побудовано й інші границі. У першій області достатньо враховувати тільки основні члени підінтегральних виразів. У другій області варто також урахувати другорядні члени величиною порядку  $(h/\lambda)^2$ , у третій – порядку  $(h/\lambda)^4$  а в четвертій –  $(h/\lambda)^6$  тобто всі члени уточненої моделі.

У групі основних членів окреме місце займає доданок  $GJ_a(\delta\theta/\delta z)^2$ , який представляє потенціальну енергію за чистого кручення. В енергетичних оцінках порядок його величини дорівнює  $(\lambda e/h^2)^2$ . Цей член треба враховувати за умови:

$$\left(\frac{e}{h}\right)^2 \geq v^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^k, \quad (5)$$

за  $k=2$  у першій області (див. рис. 2), за  $k=4$  у другій і за  $k=6$  – у третій області.

Жорсткість ребер у разі депланації зі своєї площини врахуємо доданком до секторіального моменту поперечного перетину. Задамо потрібну точність розрахунку похибкою квадрата власної частоти  $v^2=0,01$ . Визначимо на рис. 2 області та відповідні варіанти розрахункової моделі контейнера. Для  $l/h \geq 10$  (див. рис. 1) одержуємо першу, для  $\sqrt{10} \leq l/h < 10$  – другу, для  $\sqrt[3]{10} \leq l/h < \sqrt{10}$  – третю й для  $l/h \leq \sqrt[3]{10}$  – четверту область. Оскільки в контейнерах вібротомашин  $l/h > 0,01$  умова (5) вимагає врахування потенціальної енергії стрижня у разі чистого кручення за будь-яких значень  $l/h$ . Як видно з цього прикладу, модель тонкостінного стержня, у якій ураховано зсуви, може бути прийнята для аналізу динамічних процесів у стрижнях не тільки з видовженої, а й звичайної форми. Щонайменше для частоти основного тону паразитних деформаційних коливань стрижня точність розрахунку буде задовільною, коли його довжина буде більша за розмір його поперечного перетину в  $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$  раза.

Застосуємо метод енергетичних похибок для визначення поправки на інерцію повороту під час визначення частоти основного тону двохопорної призматичної балки, вважаючи, що її довжина в десять разів більша за висоту. На графіку (див. рис. 2) для значення  $h/\lambda=0,1$  на границі першої та другої областей визначаємо координату  $v^2=0,01$ . Відносна похибка для власної частоти дорівнюватиме:

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \frac{p_0 \sqrt{1+v^2} - p_0}{p_0} \approx \frac{v^2}{2} = 0,005.$$

Ця величина наближена до поправки 0,004, яку запропонував С. П. Тимошенко [1], отримавши це значення в результаті

розв'язання задачі про власні коливання. З використанням енергетичних оцінок можна також показати, що для балки за будь-яких граничних умов поправка на зсув у  $\frac{E}{fG}$  (де  $f$ - характеристика

поперечного перетину) разів більша за поправку на інерцію повороту, що збігається з результатами, які одержав (Дж. М. Гере) [2] для двоопорної балки.

С. П. Тимошенко [6] для сталеві призматичної балки показав, що врахування інерції повороту поперечного перетину так само, як і врахування інерції зсуву, наближує результат щодо власної частоти до точного згори. Хоча вплив зсувів приблизно у 3,2 раза більший за вплив інерції повороту, врахування тільки останнього з цих факторів без врахування першого виявляється виправданим, оскільки поліпшує точність визначення власної частоти. Таку модель досліджував Релей [3], прийнявши рівняння згинних коливань балки у вигляді:

$$EJ \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \rho J \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

Повертаючись до прикладу постановки задачі про динамічний аналіз видовженого контейнера вібромашини, зазначимо, що цей порівняно простий варіант розрахункової моделі контейнера дає змогу одержати результати, що за точністю задовольняють інженерні розрахунки. З урахуванням енергетичних оцінок (див. рис. 2) можна вважати, що точність визначення частоти основного тону паразитних згинно-крутильних коливань контейнера з розмірами  $l/h \geq 5$  буде не гіршою за 97%. Зі збільшенням цього відношення точність результату стрімко зростає.

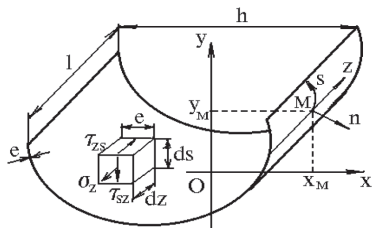


Рис. 1. Розрахункова схема стрижня

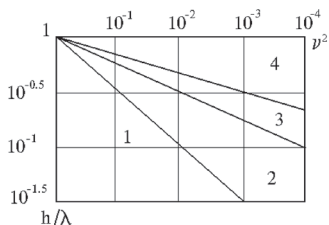


Рис. 2. Области застосування варіантів

**Висновок.** У динамічній моделі тонкостінного стрижня відкритого профілю, крім відомих компонентів депланаційних переміщень [4], треба враховувати доданок, пропорційний до третьої похідної кута повороту поперечного перетину по поздовжній координаті. Він описує депланації поперечного перетину, що пов'язані із секторіальними дотичними напруженнями. Величина цих депланацій є такого ж порядку, що й депланацій, пов'язаних із зсувами.

#### Список використаних джерел

1. Timoshenko S. P. Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section // Journal of the Franklin Institute, 1945, v.239, p.201–9.
2. Gere J.M., Lin Y. K. Coupled vibrations of thin-walled beams of open cross section // Journal of Applied Mechanics, 1958, v.25, p.373–378.
3. Lavayen-Farfan et al. Bending collapse analysis for thin and medium-thin-walled square and rectangular hollow shapes. Thin-Walled Struct. 2021.
4. Du Z. et al. Theoretical prediction and crashworthiness optimization of thin-walled structures with single-box multi-cell section under three-point bending loading. Int. J. Mech. Sci. 2019.