УДК 513.589

ФІЛЬТРАЦІЯ ДВОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ У ЛІНІЙНО-ФІЛЬТРОВИХ МОДЕЛЯХ

Ярослав П'ЯНИЛО[1], Анатолій ЛОПАТЬЄВ[2], Адріан ТОРСЬКИЙ[1], Андрій ВЛАСОВ[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, Україна
[2]Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, м. Львів, Україна

Вступ. Багато прикладних задач (зокрема опрацювання інформації, лідарні рівняння і т. п.) зводяться до інтегральних рівнянь типу згортки. Вхідні дані задаються у дискретному вигляді. Це вимагає використання числових методів розв'язування цих рівнянь. Відомо два основні підходи до числового розв'язування інтегральних рівнянь I-го роду типу згортки: використання уточнювальних алгоритмів тихоновського типу або апроксимація вихідного рівняння. Обидва ці методи не позбавлені деяких недоліків [1, 2].

Використання алгоритмів тихоновського типу призводить до втрати вольтерровості, що значно знижує можливість відновлення шуканих функцій для розглядуваних областей їх застосування застосування малих кроків сітки.

Головним недоліком другого напрямку є відсутність обліку нестійкості числового розв'язку до похибок вхідної інформації, що виводить розв'язок збуреного рівняння за межі множини коректності. Крім того, не всі квадратурні формули породжують збіжні методи.

Опрацьовуючи багатовимірні сигнали, використовують більшість операцій із теорії одновимірних. Однак математичні методи опису багатомірних сигналів не відзначаються тією завершеністю, яка характерна для математичних методів опису одновимірних.

Наявні методи розв'язку рівнянь типу згортки не завжди виконують умови, поставлені перед обчислювальним процесом, зокрема в досягненні потрібної точності обчислень.

Метою роботи є побудова спектрального методу фільтрації двовимірних сигналів в базисі многочленів Чебишова–Лагерра.

Отримані результати. Побудовано спектральний метод розв'язування інтегрального рівняння

$$af(x,y)+\mu\int_0^x\int_0^y k(x-t,y-\tau)\,f(t,\tau)\,dt\,d\tau=\varphi(x,y) \qquad (1)$$

у базисі многочленів Чебишова–Лагерра. У рівності (1) позначено: a, μ – постійні, $|a|<\infty$, $|\mu|<\infty$; $f(x,y)$ – шуканий вхідний сигнал; $k(x,y)$ – апаратна функція (ядро рівняння); $\varphi(x,y)$ – вихідний сигнал.

Шуканий вхідний сигнал $f(x,y)$ відновлюється рядом

$$f(x,y)=x^{\lambda_{ij}}\,y^{\lambda_{2f}}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_{n,m}}{r_{n,1f}\,r_{m,2f}}L_n^{\lambda_{1f}}(x)\,L_m^{\lambda_{2f}}(y), \qquad (2)$$

де $L_n^{\lambda_{1f}}(x),\ \lambda_{1f}>-1,\ L_m^{\lambda_{2f}}(y),\ \lambda_{2f}>-1,$ – многочлени Чебишова-Лагерра,

$$r_{k,if}=\frac{\Gamma(k+\lambda_{if}+1)}{k!},\quad i=1,2.$$

Вважають, що функції, які входять у рівність (1), виконують умови, які дають змогу розкласти їх у відповідні ортогональні ряди.

Формула для обчислення невідомого спектра $f_{l,k}$

$$f_{lk,}=\left[\varphi_{l,k}-\alpha\sum_{n,m=0}^{l-1,k-1}\frac{f_{n,m}d_{l,k}^{n,m}}{r_{n,1f}\,r_{m,2f}}-\mu\sum_{j=1}^{k}k_{0,j}\,f_{l,k-j}-\right.$$

$$\left.-\mu\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{k}k_{i,j}\,f_{l-i,k-j}\right]\left[\frac{\alpha}{r_{l,1f}\,r_{k,2f}}+\mu k_{0,0}\right].$$

Редукція згортки у базисі функцій Лагерра.

Оскільки базис Лагерра є ефективним для розв'язування рівнянь типу згортки, то, ураховуючи зв'язок між функціями та многочленами Лагерра, ймовірно, що аналогічні результати є й для функцій Лагерра.

Теорема. Нехай функції $k(t),\varphi(t)$ та $f(t)$ зображаються рядами типу (1). Тоді невідомі коефіцієнти f_n шуканого розв'язку обчислюють за формулою

$$f_n=\frac{1}{k_0}\left[\varphi_n-\sum_{m=0}^{n-1}k_{n-m}\,f_m\right],$$

де k_n та φ_n – коефіцієнти ортогональних рядів функцій $k(t)$ і $\varphi(t)$ за базисом функцій Лагерра.

Цей метод переноситься й на розв'язування таких інтегральних рівнянь типу згортки:

$$\alpha f(t)+\mu\int_0^t k(t-\tau)\,f(t)\,dt=\varphi(t),$$

$$\alpha f(t)+\mu\frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)\,f(t)\,dt=\varphi(t),$$

де a та μ – деякі постійні. У цих випадках коефіцієнти Фур'є–Лагерра невідомих функцій $f(t)$ обчислюватимуть за формулами

$$f_n=\frac{1}{\alpha+\mu k_0}\left[\varphi_n-\mu\sum_{m=0}^{n-1}k_{n-m}\,f_m\right],$$

$$f_n=\frac{1}{\alpha+\mu\big(k_0-k(O)\big)}\left[\varphi_n-\mu\sum_{m=0}^{n-1}k_{n-m}\,f_m\right].$$

Висновок. Отримані результати дають змогу визначити ортогональний спектр $f_{l,k}$ сигналу $f(x,y)$ за відомими спектрами $k_{l,k}$ та $\varphi_{l,k}$ Отож можна вважати, що розв'язано інтегральне рівняння типу згортки спектральним методом у базисі многочленів Чебишова–Лагерра. Оскільки у розглянутому базисі інтегральна згортка переходить точно у згортку рядів, то виключається процедура дискретизації, а разом із тим, і зумовлені нею помилки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. П'янило Я.Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. Львів: Сплайн. 2011. 248 с.
2. Лянце Г.Т., Собко В.Г., П'янило Г.М. Апроксимація функцій ортогональними та біортогональними рядами. Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: збірник праць IV науково-технічної конференції (Львів, 28–30 вересня 2016 р.). Львів: ФМІ, 2016. С. 72–75.