УДК 612.13

РУХ РІДИНИ В ГНУЧКИХ ТРУБКАХ ІЗ УРАХУВАННЯМ ЇХ ПАРАМЕТРІВ ТА ДЖЕРЕЛ

Ярослав П'ЯНИЛО[1], Анатолій ЛОПАТЬЄВ[1,2], Юрій БОРЕЦЬКИЙ[2], Володимир ЧЕРЕВАТИЙ[3]

[1] *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, Україна,*
[2] *Львівський державний університет фізичної культури, м. Львів, Україна,*
[3] *Івано-Франківський національний університет ім. Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ, Україна*

Вступ. На практиці досить часто є потреба в розрахунку параметрів руху рідини в гнучких трубках, зокрема судинах крові. Внутрішньо судинний тиск крові є одним з основних параметрів, за яким роблять висновок про функціонування серцево-судинної системи [3–5]. Між артеріальним тиском, об'ємною швидкістю крові та опором судини є певна функціональна залежність. Очевидно, що поряд з цими параметрами на процес руху крові впливають і інші параметри, зокрема сила гравітації, еластичність судин, траєкторія руху тощо. Відмінною особливістю характеристики серцево-судинної системи є вимога обчислювати всі складові параметри в кількісному виді. Для цього будуються адекватні математичні моделі процесу руху крові в судинах. Однією із задач, які можуть бути розв'язані на базі математичних моделей, є введення лікарських препаратів.

Незважаючи на недоліки і побічні ефекти, внутрішньоартеріальне введення лікарських препаратів (порівняно із іншими способами) може забезпечити швидке та цільове потрапляння препарату в конкретну ділянку організму, створити високу локальну концентрацію введеної речовини та запобігти швидкій інактивації або виведенню введеної речовини. Особливого значення ці переваги набувають

при потребі введення нестабільних або загальнотоксичних речовин. Водночас розподіл введеної речовини в органі-мішені (а надалі і в організмі) залежатиме від властивостей самої речовини та низки параметрів організму й органа, основними із яких є діаметр і форма кровоносних судин біля місця введення речовини, кількість розгалужень судини, тиск крові, в'язкість крові. Безперечно, що врахування цих параметрів дозволило б значно підвищити ефективність лікування.

У більшості математичних моделей руху крові [3–6], як правило, визначають розподіл тиску крові через геометричні параметри судин і об'ємне перенесення крові; загальний опір судини без врахування факторів, що його спричинюють.

Об'єктом дослідження є процеси руху рідини в гнучких трубках з врахуванням еластичних властивостей останніх та джерел і стоків.

Метою роботи є математичне моделювання процесу руху рідин у гнучких трубках, зокрема великих кровоносних судинах, за наявності джерел. У роботі розглянуто усталений рух рідини, який характеризується усередненими параметрами та вплив параметрів гнучкої трубки на процес руху. Загалом при русі рідини площа поперечного перерізу трубки є змінною величиною [5,6]. Коефіцієнт опору руху визначається на основі розв'язку оберненої задачі.

Основні результати.

Модель усталеного руху рідини з урахуванням відбирання (закачування).

З урахуванням сили тертя і впливу сили тяжіння розподіл тиску рідини в трубках за усталеного руху та усереднених параметрами можна описати диференціальним рівнянням [1, 2]

$$\frac{dp}{dx}+\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2}+\rho g\frac{dh}{dx}=0, \qquad (1)$$

де $p=p(x)$ – розподіл тиску вздовж трубки; ρ – густина рідини, D – внутрішній діаметр трубки; x – біжуча координата $x\in[0,l]$, де l – довжина трубки; g – прискорення вільного падіння; $h=h(x)$ – крива, що описує рельєф трубки (траєкторію руху рідини); $q=\upsilon A$ об'ємна витрата рідини (υ– швидкість); $A=\pi D^2/4$; λ – гідравлічний опір.

1.1. **Випадок неперервного рівномірного відбору.** Нехай q_n – потік рідини, що входить, а q_k – потік, виходить з трубки. Тоді $\Delta q = q_n - q_k$ – кількість рідини, яка відбирається вздовж трубки. Вважатимемо, що

$$q(x) = q_n - \frac{x}{l}\Delta q .$$

Тоді диференціальне рівняння (1) матиме вигляд

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\lambda\rho(q_n - \frac{x}{l}\Delta q)^2}{2DA^2} + \rho g\frac{dh}{dx} = 0 . \quad (2)$$

З рівняння (2) отримується розподіл тиску вздовж трубки у випадку рівномірного відбору рідини, який обчислюється за формулою [1,2]

$$p(x) - p_0 = \frac{l\lambda\rho}{6DA^2\Delta q}\left[(q_n - \frac{x}{l}\Delta q)^3 - q_n^3\right] - \rho g(h(x) - h_0) . \quad (3)$$

1.2. **Випадок зосереджених відборів.** Нехай вздовж трубки довжини l є I– зосереджених відборів рідини маси mi в точках xi (рис. 1).

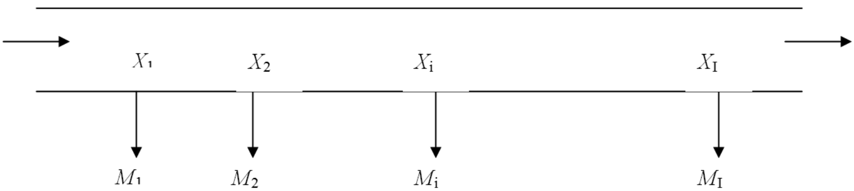

Рис. 1. Зосереджені джерела

Розподіл тиску $p(x)$ на кожному з проміжків обчислюється за формулою [1]

$$p(x) - p_0 = -\frac{\lambda m^2}{2DA^2}\frac{x}{\rho_c} - \rho_c g h(x) . \quad (4)$$

Використання формули (4) для визначення кінцевих тисків на кожному i-му проміжку веде до наступної формули для обчислення розподілу тиску

$$p_n - p_0 = -\frac{1}{2\rho_c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i m_i^2 l_i}{D_i A_i^2} - g\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i .$$

Остання формула дає можливість змінювати геометричні розміри трубки та параметри рідини на кожному з проміжків. Якщо вважати, що гідравлічний опір λ, густина ρ та діаметр D трубки на кожному проміжку приймають ті самі значення, то

$$p_n - p_0 = \frac{\lambda}{2\rho_c DA^2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 l_i + \rho g \sum_{i=1}^{n} h_i .$$

Якщо задано величини масових відборів у кожному з вузлів, тобто вузлу x_i відповідає відбір – δ_i, то

$$p_n - p_0 = \frac{1}{2\rho_c}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i l_i}{D_i A_i^2}(m_0 - \sum_{j=1}^{i}\delta_j)^2 + g\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i .$$

1.3. **Неперервний відбір** з урахуванням залежності гідравлічного опору від чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_c D/\nu$, де ν – кінематична в'язкість, v_c – середнє значення лінійної швидкості руху рідини на проміжку $[0, x]$.

У випадку ламінарного руху $\lambda = \lambda_0 \mu A/\rho q d$, де λ_0 – деяка стала, яка визначається експериментально:

$$\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2} = \frac{\rho q^2}{2DA^2}\cdot\frac{\lambda_0\mu A}{\rho q d} = \frac{\lambda_0\mu}{2DA}q .$$

У випадку рівномірного відбору

$$\frac{\lambda\rho q^2}{2DA^2} = \frac{\lambda_0\mu}{2DA}\left[q_n - \frac{x}{l}\Delta q\right].$$

Таким чином, якщо врахувати залежність числа Рейнольдса від величини потоку, то отримаємо рівняння

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\lambda_0\mu}{2DA}\left[q_n - \frac{x}{l}\Delta q\right] + \rho g\frac{dh}{dx} = 0 ,$$

розв'язок якого має вигляд

$$p(x) - p_0 = \frac{\lambda_0\mu}{2DA}\cdot\frac{l}{2\Delta q}\left[(q_n - \frac{x}{l}\Delta q)^2 - q_n^2\right] - \rho g(h(x) - h_0) .$$

Обчислювальний експеримент проведено при таких значеннях параметрів: вхідний тиск – 100 мм рт. ст., динамічна в'язкість –

0,0027 Па·с, товщина стінки – 0,0004 м, довжина трубки – 0,2 м, початкова густина рідини – 996 кг/м^3, густина рідини на виході трубки – 993 кг/м^3, швидкість руху рідини 0,15 м/с. Результати обчислень подано в табл. 1, де позначено: x – біжуча координата; p0 – значення тиску на вході в судину; p1 – значення тиску на виході з трубки без відбору; p2 – значення тиску на виході з трубки без відбору за відомими в літературі моделями; p3 – значення тиску на виході з трубки з рівномірним відбором за сталих чисел Рейнольдса, що враховується рівномірною зміною самого відбору; p4 – значення тиску на виході з трубки з рівномірним відбором, що враховується рівномірною зміною чисел Рейнольда.

2. Урахування еластичності трубки на процес руху рідини.

Рідину вважатимемо нестисливою, тобто $\rho \equiv const$. В усталеному режимі в одновимірному випадку з урахуванням гравітаційної сили, гідравлічного опору та ламінарності потоку без врахування деформації трубки рівняння руху рідини має вигляд (1) [1–2]. Очевидно, що на рух рідини впливає як барометричний перепад тиску, так і деформація трубки. Тому доцільно побудувати математичну модель руху рідини з урахуванням згаданих параметрів [6].

Скористаємося умовою нерозривності $\rho \upsilon A \equiv const$. Оскільки $A = \pi r^2$ та $A_0 = \pi r_0^2$, то врахування пружних властивостей трубки веде до зміни їх радіуса залежно від тиску рідини, яка виражається формулою:

$$r = r_0 \left(1 + \frac{r_0}{E\delta_0} p \right), (5)$$

де δ_0 та r_0 – товщина трубки і її радіус в початковому стані. З умови нерозривності отримуємо $\upsilon_0 A_0 = \upsilon A$, звідки

$$\upsilon = \upsilon_0 \frac{A_0}{A} = \upsilon_0 \frac{\pi r_0^2}{\pi r^2} = \frac{\upsilon_0}{(1 + \frac{r_0}{E\delta_0} p)^2}. (6)$$

Таблиця 1

Значення тисків рідини при швидкості руху 0,35 м/с, діаметрі трубки 0,01 м

	Вертикальна трубка					Горизонтальна трубка				
x	p0	p1	p2	p3	p4	p0	p1	p2	p3	p4
0,02	13332	13084,4	13312,5	13085,2	13098,2	13332	13318	13312,5	13318,8	13331,8
0,04	13332	12920,4	13299,5	12919,7	12942,3	13332	13309,7	13299,5	13309	13331,6
0,06	13332	12674,3	13280	12670	12708,4	13332	13297,3	13280	13292,9	13331,3
0,08	13332	12510,3	13267	12502,5	12552,5	13332	13289	13267	13281,1	13331,1
0,1	13332	12264,3	13247,5	12249,6	12318,6	13332	13276,6	13247,5	13261,9	13330,8
0,12	13332	12100,3	13234,5	12079,9	12162,6	13332	13268,3	13234,5	13247,9	13330,6
0,14	13332	11854,3	13215	11823,6	11928,7	13332	13255,8	13215	13225,2	13330,3
0,16	13332	11690,3	13202	11651,5	11772,8	13332	13247,6	13202	13208,8	13330,1
0,18	13332	11444,2	13182,5	11391,5	11538,8	13332	13235,1	13182,5	13182,4	13329,7
0,2	13332	11280,2	13169,5	11216,8	11382,9	13332	13226,9	13169,5	13163,4	13329,5

Якщо позначити $\beta = \dfrac{r_0}{E\delta_0}$, тоді рівність (6) можна записати так:

$$\upsilon = \upsilon_0 (1+\beta p)^{-2}. \quad (7)$$

Продиференціюємо рівність (7) і отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -2\beta\upsilon_0 (1+\beta p)^{-3} \frac{dp}{dx}. \quad (8)$$

З рівняння (1), ураховуючи рівність (7), рівняння руху матиме вигляд:

$$\left(1 - \frac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}\right)\frac{dp}{dx} + \frac{\lambda\rho}{2D}\frac{{\upsilon_0}^2}{(1+\beta p)^4} + \rho g\,\frac{dh}{dx} = 0. \quad (9)$$

Введемо позначення:

$$\psi_1 = \frac{\dfrac{\lambda\rho}{2D}\dfrac{{\upsilon_0}^2}{(1+\beta p)^4}}{1 - \dfrac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}};\ \psi_2 = \frac{\rho g}{1 - \dfrac{2\beta\rho_0\upsilon_0}{(1+\beta p)^3}}.$$

Тоді рівняння (9) запишемо так:

$$\frac{dp}{dx} + \psi_2\,\frac{dh}{dx} = -\psi_1. \quad (10)$$

Рівняння (10) є нелінійним за тиском. Для його розв’язування можна використати числові методи або побудувати ітераційний алгоритм таким чином. Зокрема, оскільки параметр β є малим, то одним із способів є розклад за цим параметром. Однак, згідно з обчисленнями, такий підхід призводить до значної похибки в обчисленнях.

Ітераційний алгоритм полягає в такому. У величинах ψ_1 та ψ_2 значення тиску вважатимемо постійним, рівним значенню, знайденому на попередньому кроці. Тоді отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$d(p+\psi_2 h) = -\psi_1 dx,$$

розв'язок якого є

$$p(x) = p_0 - \psi_2 h(x) - \psi_1 x. \quad (11)$$

Алгоритм розв'язування такого рівняння:

1. Для початкового значення тиску p_0 обчислюються величини ψ_1 та ψ_2.

2. Для заданого значення x_z визначається відповідне значення тиску $p(x_z)$.

3. Уточнюються величини ψ_1 та ψ_2 та визначається уточнене значення тиску.

4. Процес продовжується до того часу, поки різниця між двома сусідніми ітераціями буде менше ніж задана величина.

Обчислювальний експеримент проводився при таких значеннях параметрів: вхідний тиск – 100 мм рт. ст., динамічна в'язкість – 0,0027 Пас, товщина стінки – 0,0004 м, довжина трубки – 0,2 м, густина рідини – 996 кг/м^3, коефіцієнт гідравлічного опору – 0,3. Результати обчислень подано в таблицях, де позначено: – біжуча координата; p1 – значення тиску обчислене за формулою (5); p2 – значення тиску, обчислене за формулою (3); p3 – значення тиску обчислене за формулою (11) для різних значень модуля Юнга (табл. 2).

Таблиця 2

Значення тисків рідини при швидкості руху 0,35 м/с, діаметрі трубки 0,01 м та різних значеннях модуля Юнга Е

	Вертикальна трубка					Горизонтальна трубка				
	p1	p2	P3			p1	p2	p3		
E			5E+05	1E+06	2E+06			5E+05	1E+06	2E+06
0,02	13311	11094	11323	11304	11291	13311	13046	13297	13273	13254
0,04	13292	11058	11284	11242	11211	13292	13010	13263	13216	13177
0,06	13273	11021	11244	11180	11131	13273	12973	13229	13159	13100
0,08	13254	10984	11205	11117	11050	13254	12936	13195	13101	13023
0,1	13236	10948	11165	11053	10969	13236	12900	13161	13043	12946
0,12	13217	10911	11125	10990	10887	13217	12863	13127	12985	12868
0,14	13198	10875	11084	10926	10806	13198	12827	13093	12926	12790
0,16	13179	10838	11044	10861	10724	13179	12790	13058	12867	12712
0,18	13160	10801	11003	10796	10641	13160	12753	13023	12808	12634
0,2	13141	10765	10962	10731	10559	13141	12717	12988	12749	12555

Висновки та обговорення. Результати, отримані під час числового експерименту, добре узгоджуються з відомими в літературі та реальними даними з дослідження руху рідини в гнучких трубках. Зокрема, отримані результати підтверджують необхідність урахування розміщення трубки відносно горизонту, оскільки розподіл тиску у вертикальних і горизонтальних судинах істотно відрізняється. Як показує числовий експеримент, на рух рідини має істотний вплив і пружність трубки, яка характеризується модулем Юнга. Як було відзначено, результати отримано в усталеному режимі руху. Очевидно, що на практиці необхідно досліджувати рух у неусталеному режимі з відповідними крайовими умовами. Подані в праці результати підтверджують правильність вибраного підходу для проведення досліджень у неусталеному режимі.

Список літератури

1. Hotra O. On Approach to the Modeling Process of the Flow of Blood in Vessels / Olexandra Hotra, P'yanylo Yaroslav // Intelligent Information and Electronic Technology.– 2008.–Vol. 2. – P.103–119.

2. Прямі та обернені задачі моделювання руху речовини в об'єктах складної структури / П'янило Я.Д., Лопатьєв А.О., Готра О.З., Трач В.М., П'янило Г.М. // Теорія та методика фізичного виховання. – 2009.-№ 7.- с. 11–15.

3. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли.– Москва : Мир, 1983. – 400 с.

4. Левтов В.А. Реология крови / В.А. Левтов, С.А. Регирер, Н.Х. Шадрина. – Москва : Медицина, 1982.– 272 с.

5. Механика кровообращения / Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. – Москва : Мир, 1981.– 624 с.

6. П'янило Я. Вплив параметрів судини на процес усталеного руху крові / Я. П'янило, Г. П'янило, І. Вовчик // Математичні методи в хімії і біології. – 2013.– Т. 1, № 2. – С. 94–98.