

• ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ФІЗИЧНОМУ ВИХОВАННІ І СПОРТІ.
БИОМЕХАНІКА ТА КІНЕЗІОЛОГІЯ

УДК 796. 012: 611. 737

МОДЕЛЮВАННЯ УТРИМУВАЛЬНОЇ РОБОТИ
М'ЯЗІВ-ЗГИНАЧІВ ЛІКТЬОВОГО СУГЛОБА

Ігор ЗАНЕВСЬКИЙ

Львівський державний університет фізичної культури

Анотація. Подано результати аналітичного дослідження стійкості рівноваги передпліччя й кисті при фіксованому вертикальному положенні плеча. Метою дослідження було розробити модель утримувальної роботи двох згиначів ліктювого суглоба: двоголового м'яза плеча й плечопроменевого м'яза. Методику дослідження побудовано на основі біомеханічного аналізу, методів тригонометрії та аналітичної механіки, теорії стійкості рівноваги консервативних систем Лагранжа. Аналітичні викладки та чисельний експеримент проведено з використанням систем комп'ютерної математики Excel і Mathematica. Модель ліктювого суглоба побудовано на основі кінематичної обертової пари. Визначено силу, що розвиває м'яз, її зміцнювальну й обертову складові, довжину м'яза, зусилля в суглобі. Досліджено умови стійкості рівноваги суглоба в положеннях, коли він повністю зігнутий і повністю випростаний. Виявлено суттєво більші величини сили м'язів порівняно з вагою ланок, що утримуються в рівновазі. Досліджено вплив ваги вантажу на характер утримувальної роботи м'язів. Результати подано у формі, прийнятній для використання фахівцями фізичного виховання і спорту, які не мають відповідної математичної підготовки.

Ключові слова: ліктювий суглоб, м'язи згиначі, біомеханіка, механіко-математичне, комп'ютерне моделювання.

Постановка проблеми. До м'язів, які виконують згинання у ліктювому суглобі, належать двоголовий м'яз плеча (*m. biceps brachii*), плечовий м'яз (*m. brachialis*), плечопроменевий м'яз (*m. brachioradialis*), круглий пронатор (*m. pronator teres*) та інші м'язи, які з'єднують внутрішню поверхню надвиростка плечової кістки з кістками передпліччя й кисті. Моделі згинання передпліччя широко використовуються при біомеханічному аналізі загальних закономірностей рухового механізму тіла людини [4, 7]. Водночас, кількісний силовий аналіз рівноваги з урахуванням параметрів утримувальної роботи конкретних м'язів верхньої кінцівки не проводився. Не з'ясовано вплив величини зовнішнього навантаження на сили в суглобі.

Дослідження проведені відповідно до завдань теми 2.2.5 „Моделювання процесів взаємодії тіла людини зі спортивним приладдям” Зведеного плану наукових досліджень у галузі фізичної культури та спорту на 2006–2010 рр.

Метою роботи є створення моделі та дослідження з її використанням утримувальної роботи двох згиначів ліктювого суглоба: двоголового м'яза плеча і плечопроменевого м'яза.

Методи дослідження: біомеханічний аналіз, методи тригонометрії й аналітичної механіки, теорія стійкості рівноваги консервативних систем Лагранжа, системи комп'ютерної математики Excel і Mathematica.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В основу сучасних методів механіко-математичного моделювання опорно-рухового апарату людини покладено підхід, згідно з яким тіло людини моделюється кінематичним ланцюгом, що складається з недеформівних ланок, з'єднаних між собою шарнірами. Сили взаємодії між ланками приводяться до головного вектора і головного моменту, в складі яких „ховаються” реальні сили м'язів [7].

Прогрес у створенні технічних систем реєстрації рухів людини стимулював розвиток методів біомеханічного аналізу на основі розв'язання першої задачі динаміки: знаходження сили за кінематичними параметрами. Значно менше уваги в біомеханічних дослідженнях рухів людини приділено методам на основі розв'язання другої задачі динаміки: знаходження

закону руху за відомими силами. Серед таких робіт на особливу увагу заслуговує теорія цілеспрямованих рухів людини, в якій, зокрема, поставлено задачу знаходження закону руху ланок тіла під дією м'язових сил [10].

На прикладі функції м'язів згиначів передпліччя висунуто гіпотезу про поділ м'язів на спуртуючі й шунтуючі. Перші пришвидшують обертовий рух ланки, а другі створюють доцентрову силу, забезпечуючи іммобілізацію суглоба, оберігаючи його від пошкодження. Згідно з цією гіпотезою, найпотужнішим спуртуючим згиначем передпліччя є двоголовий м'яз плеча, а шунтуючим – плечопроменевий м'яз [1].

При розв'язанні задач статички, наприклад при дослідженні умов рівноваги тіла людини, виникає менше проблем із моделюванням м'язових сил, оскільки величина, лінія дії і напрямки сил при утримувальній роботі м'язів не змінюються [3].

Основні результати та їх обговорення. За масу ланки прийнято суму мас кісток і прилеглих до них м'язів. Розподіл мас всередині ланки вважається сталим. Тіло м'яза замінено лінією дії сили, яку він сприймає. Взаємодії між м'язами немає.

Розглянемо верхню кінцівку при фіксованому вертикальному положенні плеча. Поздовжні осі передпліччя й кисті утворюють відрізок прямої лінії, не маючи можливості для відносних рухів. Ліктьовий суглоб моделюємо ідеальною обертовою парою 5-го класу, тобто вісь суглоба є нерухомою, тертя у суглобі відсутнє.

Модель рівноваги передпліччя й кисті під дією двоголового м'яза плеча побудовано з припущенням, що лінія дії сили м'яза проходить через вісь плечового суглоба (т. В) і т. Е на поздовжній осі передпліччя, розташовану дистально на відстані l_{AE} від осі ліктьового суглоба (рис. 1). Довжина м'яза визначається з $\triangle ABE$:

$$l_{BE} = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AE}^2 - 2l_{AB}l_{AE} \sin a} . \quad (1)$$

Плече сили м'яза дорівнює: $l_{AD} = l_{AB} \sin b$ ($AD \perp BE$).

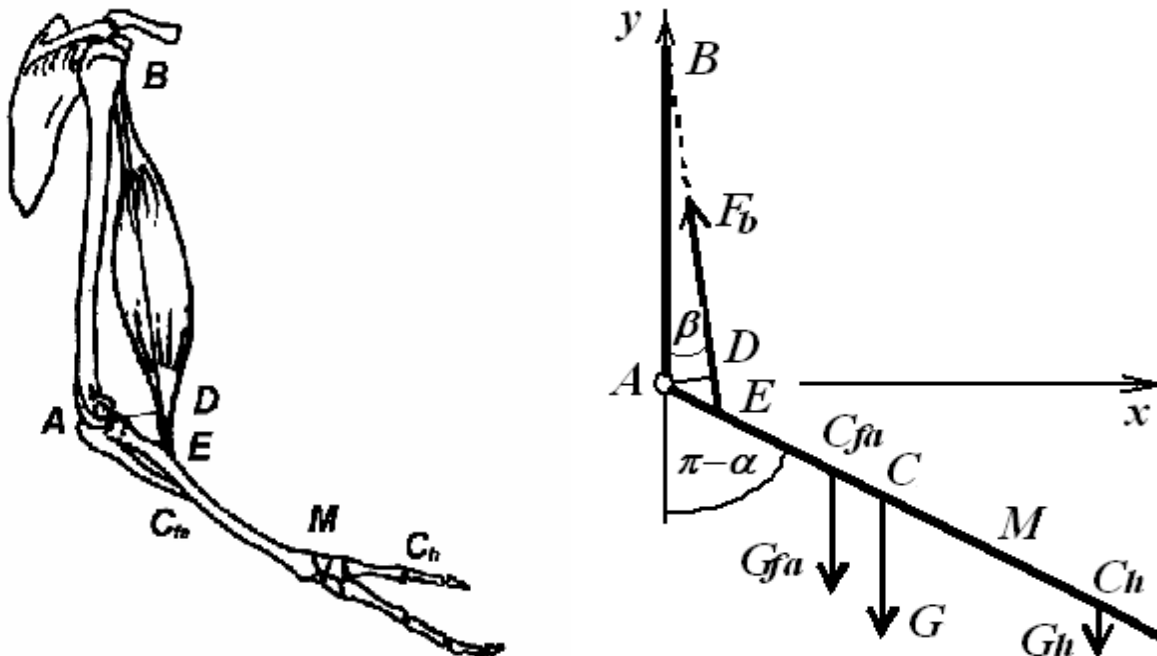


Рис. 1. Загальний вигляд та розрахункова схема верхньої кінцівки в рівновазі при утримувальній роботі двоголового м'яза плеча:

C_{fa} , C_{fh} і C – центри мас передпліччя, руки та їхній загальний центр мас

Умову рівноваги передпліччя з кистю запишемо як рівняння моментів сили м'яза й сили ваги: $F_b l_{AD} = G l_{AC} \sin a$, де $G = G_{fa} + G_h$ – сумарна вага передпліччя й кисті;

$$l_{AC} = \frac{G_{fa} \times AC_{fa} + G_h \times AC_h}{G}$$

– дистальна відстань центра ваги цих двох ланок від осі ліктьового суглоба. Тоді вираз сили м'яза матиме вигляд:

$$F_b = \frac{Gl_{AC}}{l_{AD}} \sin a = \frac{Gl_{AC}l_{BE}}{l_{AB}l_{AE}} \quad (2)$$

Стабілізаційна й обертова складові сили м'яза визначаються виразами: $F_{stab} = F_b \cos g$; $F_{rot} = F_b \sin g$. Згідно з теоремою синусів, запишемо для ΔABE про-

порції: $\frac{\sin b}{l_{AE}} = \frac{\sin a}{l_{BE}} = \frac{\sin g}{l_{AB}}$, з яких визначаються кути b, g .

Сила реакції у суглобі та її складові визначаються виразами.

$$R_x = F_b \sin b = \frac{Gl_{BE}}{l_{AE}} \sin a$$

$$R_y = F_b \cos b - G = \left[\frac{l_{AC}}{l_{AE}} \sqrt{\left(\frac{l_{BE}}{l_{AB}} \right)^2 - \sin^2 a} - 1 \right] G$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3)$$

Годограф сили реакції у ліктьовому суглобі у відношенні до ваги передпліччя й кисті при утримувальній роботі двоголового м'яза плеча подано на рис. 2.

Для положення повністю зігнутого ліктьового суглоба ($a = 0$) отримуємо:

$$l_{BE} = l_{AB} - l_{AE}; \quad F_b = \frac{Gl_{AC}l_{BE}}{l_{AB}l_{AE}} \quad (4)$$

Сила м'яза не дорівнює вазі ланок, а як буде показано пізніше, значно більша за неї.

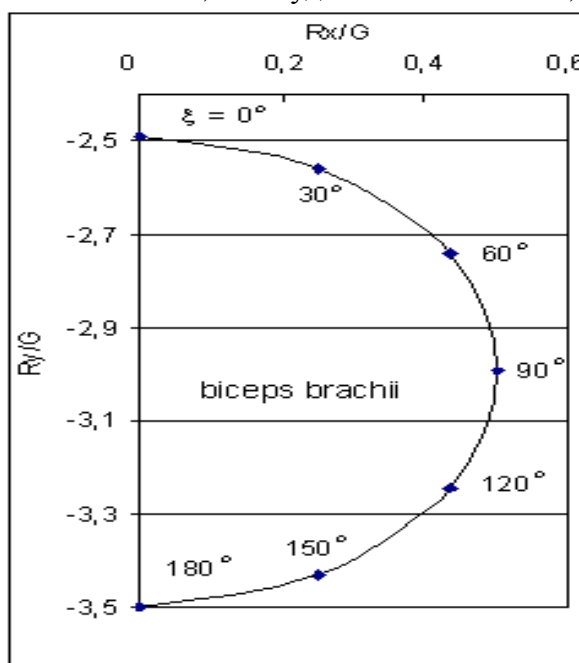


Рис. 2. Годограф сили реакції в ліктьовому суглобі при утримувальній роботі двоголового м'яза плеча

Проведемо дослідження стійкості рівноваги передпліччя й кисті у цьому й близьких до нього положеннях. Потенціал гравітаційних сил запишемо, прийнявши за нульовий рівень вісь ліктьового суглоба, а потенціал сили м'яза відрахуємо від положення його найбільшого видовження, тобто при розгорнутому куті ліктьового суглоба потенціал сили м'яза є максимальним:

$$P = Gl_{AC} \cos a + F_b l_{BE}. \quad (5)$$

Згідно з теоремою Лагранжа тіло знаходиться в положенні стійкої рівноваги, якщо його потенціальна енергія є мінімальною [8]. І навпаки, якщо потенціальна енергія сягає максимуму, тіло знаходиться в положенні нестійкої рівноваги. За Тейлером, функція має екстремум, якщо дорівнює нулю одна з її непарних похідних. Якщо наступна (парна) похідна додатна – функція сягає мінімального значення, якщо ж від'ємна – максимального [2]. Перша похідна функції потенціалу сил за кутом у ліктьовому суглобі визначається виразом:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \left(-Gl_{AC} + \frac{F_b l_{AB} l_{AE}}{l_{BE}} \right) \sin a$$

. Прирівнюючи до нуля першу похідну потенціалу

$$-Gl_{AC} + \frac{F_b l_{AB} l_{AE}}{l_{BE}} = 0$$

сил, отримуємо рівняння рівноваги: $\frac{F_b l_{AB} l_{AE}}{l_{BE}} = Gl_{AC}$, яке є еквівалентним рівнянню рівноваги, що було отримане з рівняння для умови рівності нулю суми моментів сил (2). Знак другої похідної

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = \left(\frac{F_b l_{AB} l_{AE}}{l_{BE}} - Gl_{AC} \right) \cos a - \frac{F_b (l_{AB} l_{AE} \sin a)^2}{l_{BE}^3}$$

дозволяє з'ясувати характер рівноваги. Так, положення повністю зігнутого ліктьового суглоба є положенням стійкої рівноваги при певній величині сили м'яза:

$$F_b > F_0, \text{ де } F_0 = G \frac{l_{AC} (l_{AB} - l_{AE})}{l_{AB} l_{AE}}. \quad (6)$$

При менших значеннях сили м'яза ($F_b < F_0$) положення рівноваги є нестійким. Якщо ж $F_b = F_0$, друга похідна потенціалу сил дорівнює нулю. Для дослідження характеру рівноваги в цьому разі слід отримати вищі похідні. Третя похідна дорівнює нулю (додаток). Че-

$$\frac{\partial^4 P}{\partial a^4} = - \frac{3Gl_{AC} l_{AB} l_{AE}}{(l_{AB} - l_{AE})^2}$$

тверта похідна від потенціалу сил – від'ємна, що, згідно з правилом Маклорена, свідчить про наявність максимуму функції потенціалу сил [2]. Отже, положення рівноваги передпліччя є нестійким.

Таким чином, при повністю зігнутому ліктьовому суглобі положення рівноваги передпліччя при $F_b > F_0$ стійке, а при $F_b \leq F_0$ – нестійке. Отож на основі кінематичної обертової пари розроблено модель ліктьового суглоба, яка дозволила виконати кількісний аналіз утримувальної роботи згиначів ліктьового суглоба (плечопроменевого та двоголового м'яза плеча) і визначити силу, її зміцнювальну й обертову складові, довжину м'язів, зусилля в суглобі. Залежність довжини плеча сили м'яза (у відношенні до довжини верхньої кінцівки) від кута у ліктьовому суглобі показана на рис. 3.

Дамо кількісну оцінку величини сили м'яза при повністю зігнутому ліктьовому суглобі. Розглянемо антропометричні дані дорослих чоловіків [6, 9]. Прийнято, що маса передпліччя становить 72,5 %, а кисті – 27,5 % їхньої загальної маси. Таке співвідношення виходить із даних, що маса передпліччя становить 1,615 %, а кисті – 0,614 % загальної маси тіла. Довжина кисті становить 69,5 %, а плеча – 129,9 % від довжини передпліччя. Відстань центра маси передпліччя від осі ліктьового суглоба дорівнює 42,74 % його довжини. Відстань центра маси

кисті від осі променезап'ясткового суглоба дорівнює 36,91 % його довжини. $l_{AE} = 0,164l_{AM}$ [5]. З урахуванням цих параметрів отримаємо:

$$\frac{F_0}{G} = \frac{l_{AC}(l_{AB} - l_{AE})}{l_{AB}l_{AE}} \approx 3,492 \quad (7)$$

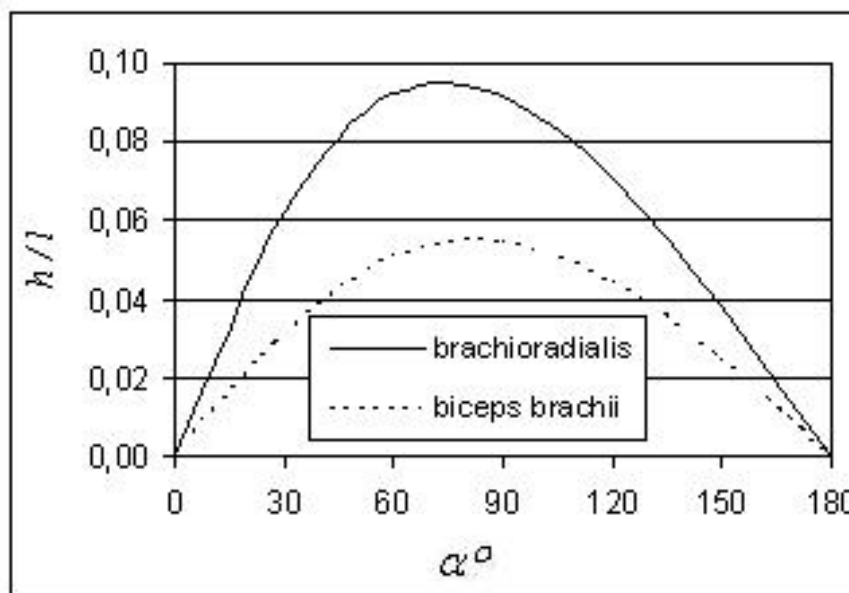


Рис. 3. Залежність довжини плеча сили м'яза від кута в ліктьовому суглобі

Відносна величина сили м'яза при утримувальній роботі з утримання рівноваги ліктьового суглоба подана на рис. 4.

Таким чином, у положенні повністю зігнутого ліктя ($\alpha = 0$) сила м'яза виявилася майже у чотири рази більшою за мінімально необхідну для врівноваження ваги передпліччя й кисті. Перш за все, цей феномен можна пояснити потребою втримання (імобілізації) суглобів. Загальновідома модель такої функції м'язів – це взаємодія антагоністів. Тут ми спостерігаємо стабілізаційну дію поодинокого м'яза, яка становить за величиною сили:

$$\frac{R_0}{G} = 1 - \frac{l_{AC}(l_{AB} - l_{AE})}{l_{AB}l_{AE}} \approx -2,492 \quad (8)$$

(знак мінус вказує на притискання кісток у суглобі). Можливо, що механізм керування м'язовим скороченням створює значно більші м'язові сили з тим, щоб забезпечити плавний перехід у сусіднє рівноважне положення при розгинанні передпліччя, адже з'являється необхідність врівноваження моменту сил ваги ланок відносно осі суглоба, що потребує відповідно більшої сили м'яза.

Розглянемо положення повністю розігнутого ліктьового суглоба ($\alpha = \rho$). Вирази для довжини м'яза й сили м'яза тут мають такий вигляд:

$$l_{BE} = l_{AB} + l_{AE}; F_p = G \frac{l_{AC}l_{BE}}{l_{AB}l_{AE}} \quad (9)$$

Перша похідна потенціалу сил у цьому положенні дорівнює нулю. Друга похідна $\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} = Gl_{AC} - \frac{F_b l_{AB} l_{AE}}{l_{AB} + l_{AE}}$ при $F_b > F_p$ – від'ємна (положення рівноваги нестійке), а при $F_b < F_p$ – додатна (положення рівноваги стійке). При $F_b = F_p$ друга і третя похідні функціоналу сил дорівнюють нулю. Четверта похідна потенціалу сил так само, як і відповідна по-

хідна для положення повністю розігнутого суглоба, $\frac{\partial^4 P}{\partial a^4} = -\frac{3Gl_{AC}l_{AB}l_{AE}}{(l_{AB} + l_{AE})^2}$ від'ємна, що, згідно з правилом Маклорена, свідчить про наявність максимуму функції потенціалу сил. Отже, при повністю розігнутому ліктьовому суглобі положення рівноваги передпліччя при $F_b < F_p$ стійке, а при $F_b \geq F_p$ – нестійке.

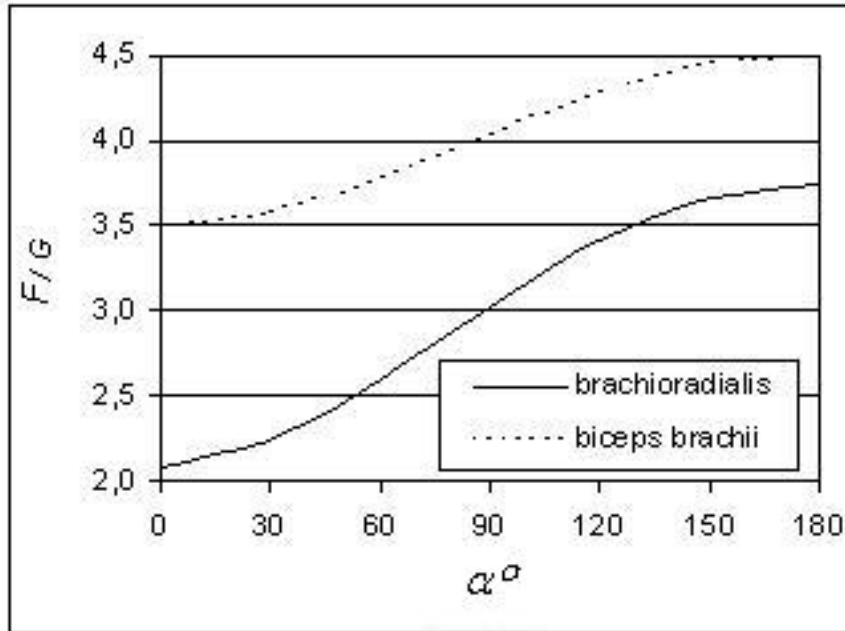


Рис. 4. Відносна величина сили м'яза при утримувальній роботі з утримання рівноваги ліктьового суглоба

У положенні повністю розігнутого ліктя ($a = p$) сила м'яза перевищує силу ваги передпліччя й кисті більш ніж у чотири з половиною рази, що є необхідним для збереження рівноваги передпліччя й кисті:

$$\frac{F_p}{G} = \frac{l_{AC}(l_{AB} + l_{AE})}{l_{AB}l_{AE}} \approx 4,501 \quad (10)$$

Аналогічно до такої ситуації в положенні повністю зігнутого ліктя це можна пояснити потребою іммобілізації суглобів. Стабілізувальна складова дії м'яза дорівнює

$$\frac{R_p}{G} = 1 - \frac{l_{AC}(l_{AB} + l_{AE})}{l_{AB}l_{AE}} \approx -3,501$$

. Але на відміну від попереднього ($a = 0$), збільшене значення сили м'яза необхідне для виведення передпліччя з положення стійкої рівноваги у сусіднє рівноважне положення при згинанні передпліччя. Подібно до виходу з положення повністю зігнутого ліктя тут також з'являється необхідність врівноваження моменту сил ваги ланок відносно осі суглоба, що потребує відповідно більшої сили м'яза.

Таким чином, у результаті моделювання рівноваги ліктьового суглоба в положеннях, коли він повністю зігнутий і повністю випростаний, виявлено суттєво більші значення сили м'яза порівняно з вагою передпліччя й кисті (до 4,5 разів), що можна пояснити необхідністю збереження стійкої рівноваги положення повністю зігнутого суглоба, а також умовою згинання з положення повністю випростаного суглоба.

Модель рівноваги передпліччя й кисті під дією плечопроменевого м'яза побудовано з припущенням, що лінія дії сили м'яза проходить через вісь променезап'ясткового суглоба

(т. М) і т. К на поздовжній осі плеча, розташованій проксимально на відстані $l_{AK} = 0,219l_{AB}$ від осі ліктьового суглоба (рис. 5).

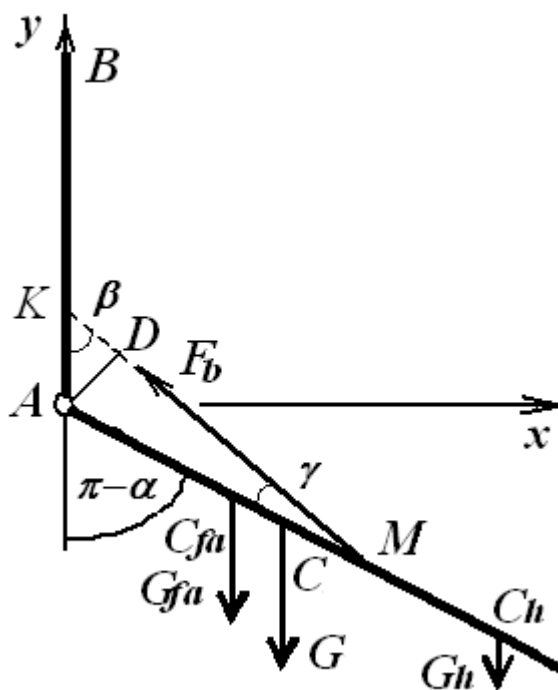


Рис. 5. Розрахункова схема верхньої кінцівки в рівновазі при утримувальній роботі плечопроменевого м'яза

Довжина м'яза визначається з ΔAKM ($AD \perp KM$):
 $l_{KM} = \sqrt{l_{AK}^2 + l_{AM}^2 - 2l_{AK}l_{AM} \sin a}$. Плече сили м'яза змінюється за функцією кута в суглобі:

$$l_{AD} = l_{AK} \sin b; F_b = \frac{Gl_{AC}}{l_{AD}} \sin a = \frac{Gl_{AC}l_{KM}}{l_{AK}l_{AM}}. \quad (11)$$

Подібно до передньої моделі рівноваги під дією двоголового м'яза плеча запишемо математичні вирази для плечопроменевого м'яза:

$$\begin{aligned} a = 0: l_{KM} &= l_{AM} - l_{AK}; F_0 = \frac{Gl_{AC}(l_{AM} - l_{AK})}{l_{AM}l_{AK}}; \\ a = p: l_{KM} &= l_{AM} + l_{AK}; F_p = \frac{Gl_{AC}(l_{AM} + l_{AK})}{l_{AM}l_{AK}}; \\ R_x &= F_b \sin b = \frac{Gl_{KM}}{l_{AM}} \sin a; \\ R_y &= F_b \cos b - G = \left[\frac{l_{AC}}{l_{AM}} \sqrt{\left(\frac{l_{KM}}{l_{AK}}\right)^2 - \sin^2 a} - 1 \right] G. \end{aligned} \quad (12)$$

Обертова та стабілізаційна складові сили м'яза (відносно ваги передпліччя й кисті) залежно від кута в ліктьовому суглобі показані на рис. 6, 7.

Аналогічним чином отримуємо вираз для потенціалу сил: $P = Gl_{AC} \cos a + F_b l_{KM}$ і відповідні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \left(-Gl_{AC} + \frac{F_b l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}} \right) \sin a ;$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = \left(\frac{F_b l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}} - Gl_{AC} \right) \cos a - \frac{F_b (l_{AK} l_{AM} \sin a)^2}{l_{KM}^3}.$$

Програма Mathematica для знаходження частинних похідних від потенціалу сил рівноваги передпліччя за кутом ліктьового суглоба наведена в додатку.

Прирівнюючи до нуля першу похідну потенціалу сил, отримуємо рівняння рівноваги:

$$-Gl_{AC} + \frac{F_b l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}} = 0,$$

яке є еквівалентним рівнянню суми моментів сил. Графік сили реакції у ліктьовому суглобі при утримувальній роботі плечопроменевого м'яза плеча подано на рис. 8.

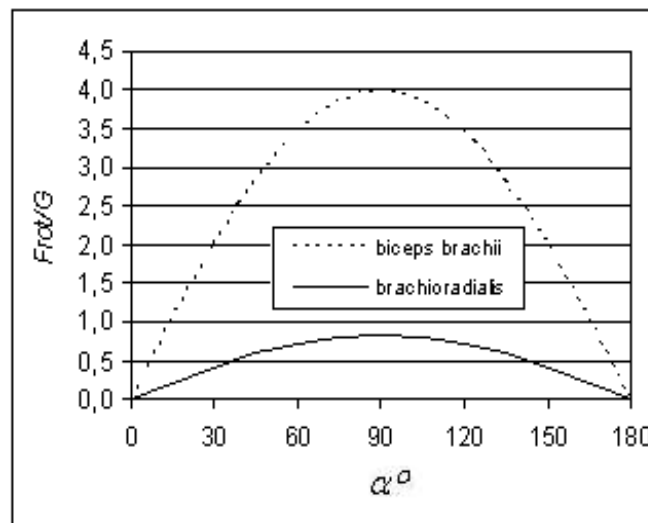


Рис. 6. Обертова складова сили м'яза (відносно ваги передпліччя й кисті) залежно від кута в ліктьовому суглобі

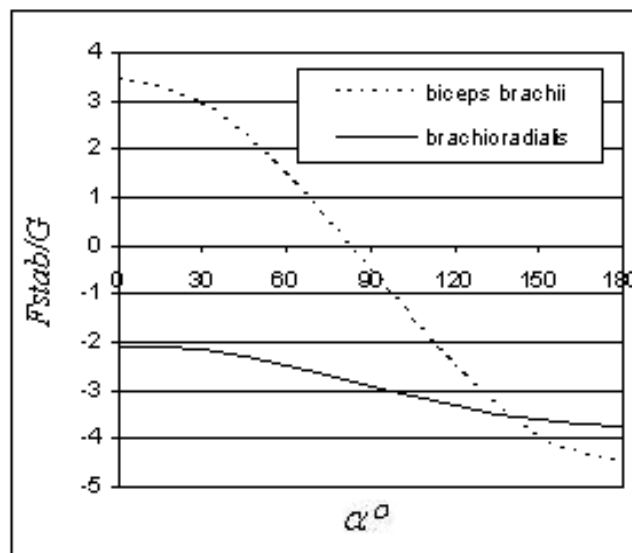


Рис. 7. Стабілізаційна складова сили м'яза (відносно ваги передпліччя й кисті) залежно від кута в ліктьовому суглобі

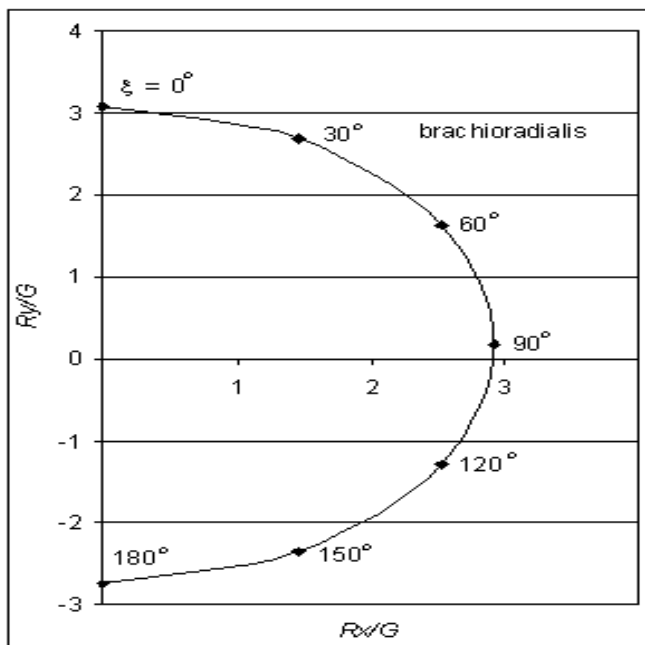


Рис. 8. Годограф сили реакції у ліктьовому суглобі при утримувальній роботі плечопроменевого м'яза плеча

У положенні повністю зігнутого ліктя: $a = 0$, $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = Gl_{AC} - \frac{F_b l_{AK} l_{AM}}{l_{AK} + l_{AM}}$. При $F_b < G \frac{l_{AC}(l_{AM} - l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}}$: $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} < 0$ положення рівноваги нестійке, а при $F_b > G \frac{l_{AC}(l_{AM} - l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}}$: $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} > 0$ положення рівноваги стійке.

Порівняльна характеристика параметрів утримувальної роботи двоголового м'яза плеча й плечопроменевого м'яза за різних кутів у ліктьовому суглобі подана на рис. 9.

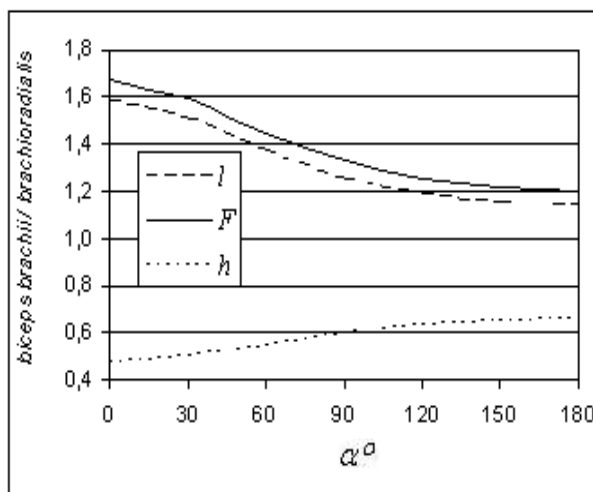


Рис. 9. Порівняльна характеристика параметрів утримувальної роботи двоголового м'яза плеча й плечопроменевого м'яза за різних кутів у ліктьовому суглобі

У положенні повністю розігнутого ліктя маємо: $a = p$,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = Gl_{AC} - \frac{F_b l_{AK} l_{AM}}{l_{AK} + l_{AM}} \quad F_b > G \frac{l_{AC}(l_{AM} + l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial a^2} < 0$$
 положення нестій-

ке, а при $F_b < G \frac{l_{AC}(l_{AM} + l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial a^2} < 0$ положення стійке.

$$F_b = G \frac{l_{AC}(l_{AM} - l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}}$$

Для при $a = 0$ отримаємо

$$\frac{\partial^4 P}{\partial a^4} = Gl_{AC} - F_b \frac{l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}} \left(\frac{3l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}^2} + 1 \right) = - \frac{3Gl_{AC} l_{AK} l_{AM}}{(l_{AM} - l_{AK})^2} < 0$$

$$F_b = G \frac{l_{AC}(l_{AM} + l_{AK})}{l_{AK} l_{AM}}$$

і для при $a = p$:

$$\frac{\partial^4 P}{\partial a^4} = -Gl_{AC} - F_b \frac{l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}} \left(\frac{3l_{AK} l_{AM}}{l_{KM}^2} - 1 \right) = - \frac{3Gl_{AC} l_{AK} l_{AM}}{(l_{AM} + l_{AK})^2} < 0$$

. Тобто в обох положеннях спостерігаємо нестійку рівновагу передпліччя й кисті.

Таким чином, розроблена модель ліктьового суглоба дозволила виконати кількісний аналіз утримувальної роботи згиначів ліктьового суглоба (плечопроменевого і двоголового м'яза плеча) й визначити силу м'яза, її зміцнювальну та обертову складові, довжину м'язів, зусилля в суглобі. У процесі аналізу моделі підтверджено відомі емпіричні дані [1] про величину плечей сил модельованих згиначів плечового суглоба, зокрема, стосовно того, що плече сили плечопроменевого м'яза приблизно вдвічі перевищує плече двоголового м'яза плеча (див. рис. 9).

Пропонована модель утримувальної роботи плечопроменевого та двоголового м'яза плеча може бути адаптована і для аналізу процесів рівноваги за участі й решти згиначів ліктьового суглоба, а саме: плечового м'яза, круглого пронатора та інших м'язів, які з'єднують внутрішню поверхню надвиростка плечової кістки з кістками передпліччя й кисті. Результати моделювання подано у вигляді таблиць і графіків, що дозволяє рекомендувати розроблену методику аналізу для фахівців фізичного виховання і спорту, які не мають відповідної математичної підготовки.

Таблиця

Відношення сили м'яза до загальної ваги передпліччя, кисті й вантажу для трьох характерних положень передпліччя

Відносна вага вантажу	двоголовий м'яз плеча			плечопроменевий м'яз		
	$a = 0^\circ$	90°	180°	0°	90°	180°
0	3,5	4,0	4,5	2,1	3,0	3,7
1	5,1	5,9	6,6	3,0	4,4	5,4
2	5,6	6,5	7,3	3,3	4,8	5,9
3	5,9	6,8	7,6	3,5	5,0	6,2
4	6,1	7,0	7,8	3,5	5,2	6,4
5	6,2	7,1	7,9	3,6	5,3	6,5
6	6,2	7,2	8,0	3,7	5,3	6,6
7	6,3	7,3	8,1	3,7	5,4	6,6
8	6,3	7,3	8,2	3,7	5,4	6,7
9	6,4	7,4	8,2	3,7	5,4	6,7
10	6,4	7,4	8,3	3,7	5,4	6,7
∞	6,7	7,7	8,6	3,9	5,7	7,0

Розглянемо яким чином впливає на утримувальну роботу м'язів величина вантажу в руці. Припустимо, що лінія дії сили ваги вантажу проходить через центр ваги кисті. В таблиці подано відношення сили м'яза до загальної ваги передпліччя, кисті й вантажу для трьох характерних положень передпліччя. З наведених результатів видно, що вказане відношення (величина безрозмірної сили) при збільшенні ваги вантажу зростає спочатку стрімко, а потім дедалі плавніше, асимптотично прямуючи до граничних значень (див. останній рядок таблиці). При збільшенні ваги вантажу, розміщеного в центрі ваги кисті, відносна сила м'язів зростає спочатку стрімко, а далі щораз плавніше, асимптотично прямуючи до граничних значень: $6,7 \div 8,6$ – у двоголовому м'язі плеча і $3,9 \div 7,0$ – у плечопроменовому м'язі.

Висновки.

- На основі кінематичної обертової пари розроблено модель ліктьового суглоба, що дозволило виконати кількісний аналіз утримувальної роботи згиначів ліктьового суглоба (плечопроменового та двоголового м'яза плеча) й визначити силу, її зміцнювальну й обертову складові, довжину м'язів, зусилля в суглобі.
- У результаті моделювання рівноваги ліктьового суглоба в положеннях, коли він повністю зігнутий і повністю випростаний, виявлено суттєво більші значення сили м'яза порівняно з вагою передпліччя й кисті (до 4,5 разів), що можна пояснити необхідністю збереження стійкої рівноваги положення повністю зігнутого суглоба, а також умовою згинання з положення повністю випростаного суглоба.
- При збільшенні ваги вантажу, розміщеного в центрі ваги кисті, відносна сила м'язів зростає спочатку стрімко, а потім щораз плавніше, асимптотично прямуючи до граничних значень: $6,7 \div 8,6$ – у двоголовому м'язі плеча і $3,9 \div 7,0$ – у плечопроменовому м'язі.
- У процесі аналізу моделі підтверджено відомі емпіричні дані про величину плечей сил модельованих згиначів плечового суглоба, зокрема, стосовно того, що плече сили плечопроменового м'яза приблизно вдвічі перевищує за довжиною плече двоголового м'яза плеча.
- Пропонована модель утримувальної роботи плечопроменового й двоголового м'яза плеча може бути адаптована й для аналізу процесів рівноваги за участі решти згиначів ліктьового суглоба, а саме: плечового м'яза, круглого пронатора та інших м'язів, які з'єднують внутрішню поверхню надвиростка плечової кістки з кістками передпліччя й кисті.
- Результати моделювання подано у формі таблиць і графіків, що дозволяє рекомендувати розроблену методику аналізу фахівцям фізичного виховання і спорту, які не мають відповідної математичної підготовки.

Список літератури

1. Алфутов Н. А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М. : Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Зацюрский В. М. Биомеханика двигательного аппарата человека / В. М. Зацюрский, А. С. Аруин, В. Н. Селуянов. – М. : Физкультура и спорт, 1981. – 144 с.
3. Коренев Г. В. Введение в механику человека / Г. В. Коренев. – М. : Наука, 1977. – 264 с.
4. Amis A. A. Biomechanics of the elbow / A. A. Amis // Current Orthopaedics. – 2002. – Vol. 16, N 5. – P. 349-354.
5. Korn G. A. Mathematical handbook for scientists and engineers / G. A. Korn, T. M. Korn. – New York : McGraw Hill Book Company, 1968. – 832 p.
6. Krause J. V. The mechanical foundation of human motion / J. V. Krause. – Saint Louis: The C.V. Mosby Co., 1999. – 494 p.
7. Kreighbaum E. Biomechanics: A qualitative approach for studying human movement / E. Kreighbaum, K. M. Barthels. – London : Collier Macmillan Publ., 2002. – 684 p.
8. Micheau A. Interactive atlas of human anatomy [Electronic recourse] / A. Micheau, D. Hoia. – Campus Medica, 2006. – Access mode: <http://www.e-anatomy.org>
9. Motmans R. Ergonomie [Electronic recourse] / R. Motmans. – Leuven : DINBelg, 2005. [Електронний ресурс]. – Access mode: <http://www.e-anatomy.org>

10. Zatsiorsky V. M. Kinetics of human motion / V. M. Zatsiorsky. – Champaign : Human Kinetics, 2003. – 654 p.

11. Коренев Г. В. Введение в механику человека / Г. В. Коренев. – М. : Наука, 1977. – 264 с.

List of references

1. Alfutov N. A. Osnovy raschjota na ustojchivost' uprugih sistem / N. A. Alfutov. – М. : Mashinostroyeniye, 1978. – 312 s.

2. Zaciorskij V. M. Biomehanika dvigatel'nogo apparata cheloveka / V. M. Zaciorskij, A. S. Aruin, V. N. Selujanov. – М. : Fizkul'tura i sport, 1981. – 144 s.

3. Korenev G. V. Vvedenie v mehaniku cheloveka / G. V. Korenev. – М. : Nauka, 1977. – 264 s.

Додаток

Програма Mathematica для знаходження частинних похідних від потенціалу сил рівноваги передпліччя за кутом ліктьового суглоба

Умовні позначення: $l = l_{AC}$; $b = l_{AB} (l_{AK})$; $a = l_{AE} (l_{AM})$; $c = l_{BE} (l_{KM})$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]} ; D[G * l * \text{Cos}[\alpha] + F * c, \{\alpha, 1\}] \\ - G * l * \text{Sin}[\alpha] + \frac{a * b * F * \text{Sin}[\alpha]}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]}}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]} ; D[G * l * \text{Cos}[\alpha] + F * c, \{\alpha, 2\}] \\ - G * l * \text{Cos}[\alpha] + F \left[\frac{a * b * \text{Cos}[\alpha]}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]}} - \frac{a^2 * b^2 * \text{Sin}[\alpha]^2}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{3/2}} \right]$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]} ; D[G * l * \text{Cos}[\alpha] + F * c, \{\alpha, 3\}] \\ G * l * \text{Sin}[\alpha] + F \left[- \frac{3 * a^2 * b^2 * \text{Cos}[\alpha] * \text{Sin}[\alpha]}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{3/2}} - \frac{a * b * \text{Sin}[\alpha]}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]}} \right. \\ \left. + \frac{3 * a^3 * b^3 * \text{Sin}[\alpha]^3}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{5/2}} \right]$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]} ; D[G * l * \text{Cos}[\alpha] + F * c, \{\alpha, 4\}] \\ G * l * \text{Cos}[\alpha] + F \left[- \frac{3 * a^2 * b^2 * \text{Cos}[\alpha]^2}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{3/2}} - \frac{a * b * \text{Cos}[\alpha]}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha]}} \right. \\ \left. + \frac{18 * a^3 * b^3 * \text{Cos}[\alpha] * \text{Sin}[\alpha]^2}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{5/2}} \right. \\ \left. + \frac{4 * a^2 * b^2 * \text{Sin}[\alpha]^2}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{3/2}} - \frac{15 * a^4 * b^4 * \text{Sin}[\alpha]^4}{(a^2 + b^2 - 2 * a * b * \text{Cos}[\alpha])^{7/2}} \right]$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДЕРЖИВАЮЩЕЙ РАБОТЫ МЫШЦ-СГИБАТЕЛЕЙ ЛОКТЕВОГО СУСТАВА

Игорь ЗАНЕВСКИЙ

Львовский государственный университет физической культуры

Аннотация. Представлены результаты аналитического исследования устойчивости равновесия предплечья и кисти при фиксированном вертикальном положении плеча. Целью исследования было разработать модель удерживающей работы двух сгибателей локтевого сустава: двуглавой мышцы плеча и плечелучевой мышцы. Методика исследования построена на основе биомеханического анализа, методов тригонометрии и аналитической механики, теории устойчивости равновесия консервативных систем Лагранжа. Аналитические выкладки и численный эксперимент проведены с использованием систем компьютерной математики Excel и Mathematica. Модель локтевого сустава построена на основе кинематической вращательной пары. Определены сила, которую развивает мышца, её укрепляющая и вращательная составляющие, длина мышцы, усилия в суставе. Исследованы условия устойчивости равновесия сустава в положениях, когда он полностью согнут и полностью распрямлен. Выявлена существенно большая величина силы мышцы сравнительно с весом звеньев, которые удерживаются в равновесии. Исследовано влияние веса груза на характер удерживающей работы мышц. Результаты представлены в форме, приемлемой для использования специалистами физического воспитания и спорта, которые не имеют соответствующей математической подготовки.

Ключевые слова: локтевой сустав, мышцы сгибатели, биомеханика, механико-математическое, компьютерное моделирование.

MODELLING OF A STABILISING WORK OF FLEXOR MUSCLES OF AN ELBOW JOINT

Ihor ZANEVSKYY

Lviv State University of Physical Culture

Annotation. Results of the analytical research of a balance stability of a forearm and a hand with an arm in the fixed vertical position are presented. The aim of the research was to develop a model of a stabilising work of two elbow joint flexors: m. biceps brachii and m. brachioradialis. A method of the research is created on biomechanics, trigonometry, and analytical mechanics methods, Lagrange theory of stable balance of conservative systems. Analytical transformations and numerical calculative experiment were made using systems of computer calculation Excel and Mathematica. A model of the elbow joint is build on the basis of a kinematic rotary pair. A muscle force and its stabilising and rotary components, length of the muscle and forces in the joint are determined. Conditions of the balance stability in the joint in two positions of exactly flexed and inflexed elbow joint was studied. Exactly greater magnitude of the muscle force comparing to the weight of the segments supported in balance is determined. The influence of the external weight on the stabilising work of the muscles is studied. The results are presented in graphical and table form that makes easy to use the methods by specialists of physical culture and sport, which are not familiar with mathematics.

Key words: elbow joint, muscle flexors, biomechanics, mechanical and mathematical modeling, computer simulation.